

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ REVIEW

Ο παράγοντας Φ του Bayes Σύντομη αναφορά σε έναν εναλλακτικό τρόπο λήψης στατιστικών αποφάσεων

Στην παρούσα ανασκόπηση γίνεται μια σύντομη αναφορά στην κλασική και στην μπεϋζιανή στατιστική μεθοδολογία. Μέσα από ισχυρά επιχειρήματα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μπεϋζιανή μεθοδολογία συμβάλλει αποφασιστικά, καταλήγοντας επαγωγικά σε ασφαλή συμπεράσματα. Αυτό συμβαίνει γιατί δίνει τη δυνατότητα εκτίμησης της ένδειξης που προέρχεται από τα δεδομένα μιας συγκεκριμένης μελέτης –μέσω του υπολογισμού του παράγοντα Bayes– και επιτρέπει τον συνδυασμό της ένδειξης αυτής με την προϋπάρχουσα ένδειξη, μέσω της εφαρμογής του θεωρήματος του Bayes, για την εξαγωγή αξιόπιστων συμπερασμάτων. Από την άλλη πλευρά, ο έλεγχος υποθέσεων δεν χρησιμοποιείται ορθά από τους περισσότερους ερευνητές για την εξαγωγή συμπερασμάτων. Σε αντίθεση με την μπεϋζιανή μεθοδολογία, ο έλεγχος υποθέσεων αντιμετωπίζει την πιθανότητα ως σχετική συχνότητα των γεγονότων που περιγράφονται στη στατιστική υπόθεση και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εξαγωγή συμπερασμάτων με βάση τα δεδομένα μίας μόνο μελέτης. Παρ' όλα αυτά, προσφέρει σημαντική πληροφορία μακροπρόθεσμα έπειτα από την επανάληψη της ίδιας μελέτης. Συνεπώς, οι έλεγχοι υποθέσεων και η τιμή p δεν πρέπει να αγνοούνται αλλά να χρησιμοποιούνται ορθά ταυτόχρονα με τη θεωρία του Bayes για την εξαγωγή αξιόπιστων αποτελεσμάτων.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μπεϋζιανή συμπερασματολογία (Bayes theory), προς τιμή του Thomas Bayes, χρησιμοποιείται για να καθορίσει το πώς ο βαθμός πεποίθησης (degree of belief) μπορεί να τροποποιείται σχετικά με μια ερευνητική υπόθεση, με βάση το αποτέλεσμα μιας συγκεκριμένης μελέτης, π.χ. μιας κλινικής δοκιμής. Παρ' όλο που η μπεϋζιανή μεθοδολογία –της οποίας βασική φιλοσοφία είναι ο συνδυασμός των αποτελεσμάτων προγενέστερων μελετών με το αποτέλεσμα μιας συγκεκριμένης μελέτης– έχει αναπτυχθεί σημαντικά τα τελευταία 20 έτη, οι επιστήμονες υγείας φαίνεται να μην την χρησιμοποιούν στην καθημερινή τους έρευνα.¹

Ένα από τα θεμελιώδη εργαλεία της μπεϋζιανής μεθοδολογίας στη λήψη αποφάσεων είναι ο παράγοντας Φ του Bayes (Bayes factor), ο οποίος στην απλούστερη μορφή του είναι ένας λόγος πιθανοφανειών, δηλαδή ο λόγος της πιθανότητας να προκύψουν τα δεδομένα μιας έρευνας λαμβανομένου υπ' όψη ότι ισχύει η μηδενική (άκυρη, «άνευ κύρους») υπόθεση H_0 –που εκφράζει την απουσία σχέσης– προς την πιθανότητα να προκύψουν τα δεδομέ-

να της ίδιας μελέτης λόγω του ότι ισχύει η εναλλακτική υπόθεση H_1 (η οποία εκφράζει την ύπαρξη σχέσης στα δεδομένα). Γενικά, ο παράγοντας Bayes χαρακτηρίζεται από αντικειμενικότητα, γιατί στηρίζεται στα δεδομένα μιας μελέτης για την εκτίμηση της ένδειξης. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί συμπληρωματικά ή ακόμη και στη θέση της «κλασικής» τιμής πιθανότητας p (ή συνηθέστερα p value, η οποία εκφράζει την πιθανότητα σφάλματος τύπου I, δηλαδή την εσφαλμένη απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης H_0) για τη λήψη μιας στατιστικής απόφασης. Αντίθετα με τις τιμές p , ο παράγοντας Bayes έχει μια στέρεα θεωρητική θεμελίωση και ερμηνεία που επιτρέπει τη χρήση του τόσο στην εξαγωγή συμπερασμάτων όσο και στη λήψη αποφάσεων.² Μελετώντας κάποιος προσεκτικά το θέμα διαπιστώνει ότι ο παράγοντας Bayes αναδεικνύει πως οι τιμές p «διογκώνουν» σε μεγάλο βαθμό τις ενδείξεις για την απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης. Το σημαντικότερο πλεονέκτημά τους είναι ότι καθιστούν σαφή τη διάκριση μεταξύ παραγωγικού και επαγωγικού τρόπου σκέψης, ενώ παρέχεται ένα πλαίσιο μέσα στο οποίο μπορεί να συνδυάζονται προηγούμενες με τρέχουσες ενδείξεις. Ο

ΑΡΧΕΙΑ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΙΑΤΡΙΚΗΣ 2017, 34(5):622–627
ARCHIVES OF HELLENIC MEDICINE 2017, 34(5):622–627

Δ. Πανάρετος,
Δ. Παναγιωτάκος

Τμήμα Επιστήμης Διαιτολογίας-
Διατροφής, Σχολή Επιστημών Υγείας
και Αγωγής, Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο,
Αθήνα

Bayes factor: A brief review
of an alternative way of making
statistical decisions

Abstract at the end of the article

Λέξεις ευρετηρίου

Έλεγχος υποθέσεων
Ισχύς
Παράγοντας Bayes
Πιθανοφάνεια
Τιμή p

Υποβλήθηκε 26.10.2016
Εγκρίθηκε 17.11.2016

Goodman περιέγραψε αναλυτικά τις εγγενείς δυσκολίες της χρήσης του ελέγχου των υποθέσεων και των τιμών p στη στατιστική συμπερασματολογία, συστήνοντας την υιοθέτηση της μπεϋζιανής μεθοδολογίας και οδηγώντας τους επιστήμονες υγείας στη λήψη αποφάσεων με βάση τις ενδείξεις.³ Στη συνέχεια γίνεται μια όσο το δυνατόν μη μαθηματική προσέγγιση της μπεϋζιανής μεθοδολογίας, παρουσιάζοντας ιδέες πιθανόν νέες στους επιστήμονες υγείας, οι οποίες όμως είναι γνωστές στη στατιστική κοινότητα τουλάχιστον από τη δεκαετία του 1920.^{4,5}

2. Ο ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ BAYES

Ο παράγοντας Bayes (Φ) ορίζεται ως ο λόγος της πιθανότητας να προκύψουν τα δεδομένα D μιας μελέτης λαμβανομένου υπ' όψη ότι ισχύει η μηδενική υπόθεση, προς την πιθανότητα να προκύψουν τα δεδομένα D της ίδιας μελέτης λόγω του ότι ισχύει η εναλλακτική υπόθεση. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$\Phi = \frac{\Pr(D|H_0)}{\Pr(D|H_1)}$$

Στο θεώρημα του Bayes, ο παράγοντας $P(D|H_0)$ ή H_1 είναι ο «δείκτης» μέσω του οποίου τα δεδομένα «εκφράζονται» και είναι ξεχωριστός από το καθαρά υποκειμενικό τμήμα της εξίσωσης, ενώ ο λογάριθμός του είναι γνωστός ως βάρος της ένδειξης (weight of the evidence).^{6,7} Συνεπώς, ο μπεϋζιανός παράγοντας Φ είναι ένας λόγος πιθανοφανειών (likelihood ratio), ο οποίος συγκρίνει το πόσο καλά οι δύο υποθέσεις (η μηδενική και η εναλλακτική) «προβλέπουν» τα δεδομένα μιας μελέτης. Η υπόθεση η οποία προβλέπει καλύτερα τα εμπειρικά δεδομένα είναι αυτή που έχει περισσότερες ενδείξεις υπέρ αυτής. Έτσι, αν $\Phi > 1$, τότε σημαίνει ότι είναι k -φορές πιο πιθανό τα δεδομένα να ισχύουν κάτω από τη μηδενική υπόθεση σε σύγκριση με την εναλλακτική. Έχει προταθεί ότι τιμές του παράγοντα $\Phi > 10$ αποτελούν στοιχεία για ικανή ένδειξη σχέσης της μιας έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης.

Επίσης, πρέπει να σημειωθεί ότι, σε αντίθεση με τις τιμές της ευρέως χρησιμοποιημένης πιθανότητας p , ο παράγοντας Bayes έχει ισχυρό θεωρητικό υπόβαθρο και μπορεί να ερμηνευτεί με τρόπο τέτοιο, ώστε να επιτρέπεται η χρήση του τόσο στην εξαγωγή συμπερασμάτων όσο και στη λήψη αποφάσεων. Για παράδειγμα, αν ο παράγοντας Bayes για τη μηδενική υπόθεση σε σχέση με την εναλλακτική είναι 0,5 (ή 1:2), τότε η σημασία αυτού μπορεί να εκφραστεί με τους εξής τρόπους: ($\alpha 1$) Ως αντικειμενική πιθανότητα, δηλαδή τα εμπειρικά αποτελέσματα να είναι δύο φορές πιο πιθανό να προκύψουν με δεδομένο ότι ισχύει η εναλλακτική υπόθεση H_1 σε σχέση με τη μηδενική υπόθεση H_0 ,

(β2) ως επαγωγική σχέση, δηλαδή ότι οι ενδείξεις υπέρ της εναλλακτικής υπόθεσης να είναι διπλάσιες από αυτές της μηδενικής υπόθεσης και ($\gamma 3$) ως υποκειμενική πιθανότητα, δηλαδή το odds (λόγος συμπληρωματικών πιθανοτήτων) της μηδενικής υπόθεσης σε σχέση με την εναλλακτική υπόθεση μετά το πείραμα να είναι το μισό απ' ό,τι ήταν πριν από το πείραμα.

Στον πίνακα 1 παρουσιάζεται το μέγεθος της ένδειξης ανάλογα με διάφορες τιμές του παράγοντα Φ υπό τη μηδενική υπόθεση στις τιμές 90%, 50% και 25%, υποδηλώνοντας, αντίστοιχα, μεγάλη, μέτρια και μικρή εμπιστοσύνη στη μηδενική υπόθεση. Αν κάποιος είναι ισχυρά πεπεισμένος για κάποια ένδειξη (δηλαδή η εκ των προτέρων πιθανότητα της μηδενικής υπόθεσης είναι 90%) πριν από την έναρξη του πειράματος, τότε ένας παράγοντας Bayes ίσος με 1/10 θα καταστήσει μέτρια την εμπιστοσύνη προς τη μηδενική υπόθεση (η εκ των υστέρων πιθανότητα θα είναι 47%). Αντίθετα, αν κάποιος είναι διφορούμενος στην αρχή (δηλαδή η εκ των προτέρων πιθανότητα είναι 50%), τότε η ίδια ένδειξη θα καταστήσει μικρή την εμπιστοσύνη προς τη μηδενική υπόθεση (η εκ των υστέρων πιθανότητα θα είναι 9%). Ένας παράγοντας Bayes είναι αρκετά ισχυρός ώστε να μετατοπίσει κάποιον από το να είναι κατά 90% σίγουρος ως προς τη μηδενική υπόθεση (εκ των προτέρων πιθανότητα), στο να είναι μόνο 8% σίγουρος (εκ των υστέρων πιθανότητα).

Πίνακας 1. Η εκ των υστέρων πιθανότητα της μηδενικής υπόθεσης, έπειτα από την εφαρμογή του θεωρήματος Bayes, ως συνάρτηση της εκ των προτέρων πιθανότητας της μηδενικής υπόθεσης και του παράγοντα Bayes.

Μέγεθος της ένδειξης	Παράγοντας Bayes	Μείωση στην πιθανότητα της μηδενικής υπόθεσης (%)	
		Από ... (εκ των προτέρων πιθανότητα)	Σε όχι λιγότερο από ... (εκ των υστέρων πιθανότητα)
Ασθενής	1/5	90	64
		50	17
		25	6
Μέτρια	1/10	90	47
		50	9
		25	3
Μέτρια έως ισχυρή	1/20	90	31
		50	5
		25	2
Ισχυρή έως πολύ ισχυρή	1/100	90	8
		50	1
		25	0,3

3. ΣΧΕΣΗ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ P ΚΑΙ ΤΟΥ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ Φ ΤΟΥ BAYES

Ο παράγοντας Φ του Bayes διαφέρει από την πιθανότητα P. Όπως είναι φανερό, οι διαφορές τους αρχίζουν από το πεδίο των τιμών τους, καθώς η τιμή p είναι μια πιθανότητα, δηλαδή λαμβάνει τιμές από το 0–1, ενώ ο παράγοντας Bayes είναι λόγος πιθανοφανειών, δηλαδή λαμβάνει τιμές από το 0 έως το άπειρο. Επίσης, η πιθανότητα P λαμβάνει υπ' όψη της μόνο τη μηδενική υπόθεση, ενώ ο παράγοντας Bayes χρησιμοποιεί και τις δύο υποθέσεις, καθιστώντας σαφές ότι μια ένδειξη για να είναι κατά της μηδενικής υπόθεσης πρέπει να είναι υπέρ κάποιας εναλλακτικής. Επί πλέον, ο παράγοντας Bayes εξαρτάται από την πιθανότητα των εμπειρικών δεδομένων και μόνο, ενώ ο υπολογισμός της τιμής p περιλαμβάνει και τη διεξαγωγή ενός μεγάλου αριθμού μελετών, όμοιων μεταξύ τους, με στόχο τη μείωση του σφάλματος μακροπρόθεσμα. Άρα, οι παράγοντες που δεν σχετίζονται με τα δεδομένα μιας μελέτης και επηρεάζουν την τιμή p, όπως συχνά συνιστούν τις αιτίες διακοπής μιας κλινικής δοκιμής, δεν μπορούν να επηρεάσουν και τον παράγοντα Bayes.^{8,9}

Αν θέλουμε να ξεφύγουμε από τις τιμές p και να κινηθούμε προς τους αντίστοιχους παράγοντες Bayes, είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε τη σχέση με την οποία συνδέονται. Με λίγες παραδοχές μπορούμε να κάνουμε αυτή τη σύγκριση. Πρώτον, ο παράγοντας Bayes πρέπει να υπολογίζεται για την ίδια υπόθεση για την οποία έχει υπολογιστεί η τιμή του p. Η τιμή του p πάντα υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την παρατηρηθείσα διαφορά, οπότε και ο παράγοντας Bayes πρέπει να υπολογίζεται με βάση το εν λόγω αποτέλεσμα. Δεύτερον, επειδή μικρότερες τιμές του p δηλώνουν μικρότερη στήριξη στη μηδενική υπόθεση ή, διαφορετικά, μεγαλύτερη ένδειξη εναντίον της, θα πρέπει να κατασκευάσουμε τον παράγοντα Bayes με τον ίδιο τρόπο, έτσι ώστε μικρότερες τιμές του να δηλώνουν μικρότερη στήριξη στη μηδενική υπόθεση. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να τοποθετήσουμε την πιθανοφάνεια που αφορά στη μηδενική υπόθεση στον αριθμητή και την πιθανοφάνεια που αναφέρεται σε μια εναλλακτική υπόθεση στον παρονομαστή. Αν τοποθετήσουμε την ένδειξη για την υπόθεση η οποία υποστηρίζεται καλύτερα στον παρονομαστή, ο λόγος που προκύπτει θα είναι ο ελάχιστος παράγοντας Bayes με βάση τη μηδενική υπόθεση. Ο ελάχιστος παράγοντας Bayes είναι αντίστροφος του μέγιστου λόγου πιθανοφανειών και ονομάζεται πρότυπη πιθανοφάνεια (standardized likelihood). Ουσιαστικά, είναι η μικρότερη δυνατή ένδειξη που στηρίζει τη μηδενική υπόθεση ή, διαφορετικά, η μεγαλύτερη δυνατή ένδειξη εναντίον της μηδενικής υπόθεσης, και αυτό είναι ένα εξαιρετικό σημείο αναφοράς για να συγκρίνουμε την τιμή p.

Η απλούστερη μορφή μεταξύ των τιμών p και του παράγοντα Bayes προκύπτει όταν οι στατιστικοί έλεγχοι βασίζονται στην κανονική κατανομή, όπως άλλωστε συμβαίνει και στις περισσότερες στατιστικές διαδικασίες. Στην περίπτωση αυτή, ο παράγοντας Bayes υπολογίζεται με βάση τους ίδιους αριθμούς που υπολογίζεται και μια πιθανότητα P. Η σχέση είναι η εξής:

$$\text{Παράγοντας Bayes} = e^{-\frac{z^2}{2}}$$

όπου z είναι ο αριθμός των τυπικών σφαλμάτων από την απουσία αποτελέσματος (null effect), δηλαδή δείχνει πόσο απέχει η συγκεκριμένη μέτρηση από τη μέση τιμή των δεδομένων.^{10–12}

Στον πίνακα 2 παρουσιάζεται το πόσο διαφορετικά μπορεί να είναι τα συμπεράσματα μιας μελέτης ανάλογα με το αν χρησιμοποιούνται οι τιμές p ή οι παράγοντες Bayes για την ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Για παράδειγμα, όταν ένα αποτέλεσμα είναι 1,96 τυπικά σφάλματα από το σημείο της απουσίας αποτελέσματος (δηλαδή η πιθανότητα p ισούται με 0,05), τότε ο παράγοντας Bayes θα είναι ίσος με 0,15, εννοώντας ότι η μηδενική υπόθεση δέχεται 15% περισσότερη στήριξη απ' όσο η υπόθεση που στηρίζεται καλύτερα. Τιμές της πιθανότητας p μεταξύ 0,001–0,01 αντιστοιχούν σε ελάχιστους παράγοντες Bayes 0,005–0,036, δηλώνοντας μέτρια έως ισχυρή ένδειξη, ενώ οι τιμές p < 0,01 αντιστοιχούν σε ελάχιστους παράγοντες Bayes < 0,005, δηλώνοντας ισχυρή έως πολύ ισχυρή ένδειξη. Όταν η πιθανότητα P λαμβάνει πολύ μικρές τιμές, τότε η ανισότητα μεταξύ αυτής και του παράγοντα Bayes καθίσταται αμελητέα, επιβεβαιώνοντας ότι οι ισχυρές ενδείξεις θα φαίνονται ισχυρές, ανεξάρτητα από τον τρόπο με τον οποίο υπολογίστηκαν.

Αναλύοντας τους πίνακες 1 και 2 παρατηρούμε αυτό που πολλοί ερευνητές μαθαίνουν εμπειρικά και αυτό το οποίο οι στατιστικοί γνωρίζουν: Ότι δηλαδή το βάρος της ένδειξης εναντίον της μηδενικής υπόθεσης δεν είναι τόσο ισχυρό όσο δηλώνεται από τις τιμές της πιθανότητας P. Αυτός είναι ο κυριότερος λόγος που πολλοί μπεύζιανοί αναλυτές κλινικών δοκιμών συμπεραίνουν ότι οι εμπειρικές διαφορές οι οποίες παρατηρήθηκαν είναι πιθανόν να μην ισχύουν.^{13–15} Επίσης, η εφαρμογή της μπεύζιανής μεθοδολογίας αιτιολογεί την άποψη έμπειρων ερευνητών για μείωση της τιμής p < 5%.^{16,17}

4. ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ BAYES ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ

Στην προηγούμενη ενότητα αναφέρθηκε ο τρόπος υπολογισμού του παράγοντα Bayes με βάση την τιμή p, η οποία προκύπτει από την εφαρμογή ενός κλασικού ελέγχου υποθέσεων. Ωστόσο, μπορούν να υπολογιστούν και άλλες

Πίνακας 2. Σχέση μεταξύ των τιμών p και των ελάχιστων τιμών του παράγοντα Bayes, καθώς και το αποτέλεσμα της εν λόγω ένδειξης στην πιθανότητα της μηδενικής υπόθεσης.

Τιμή p (τιμή z)	Ελάχιστος παράγοντας Bayes	Μείωση στην πιθανότητα της μηδενικής υπόθεσης (%)		Μέγεθος της ένδειξης
		Από ... (εκ των προτέρων πιθανότητα)	Σε όχι λιγότερο από ... (εκ των υστέρων πιθανότητα)	
0,10 (1,64)	0,26 (1/3,8)	75	44	Ασθενής
		50	21	
		17	5	
0,05 (1,96)	0,15 (1/6,8)	75	31	Μέτρια
		50	13	
		26	5	
0,03 (2,17)	0,095 (1/11)	75	22	Μέτρια
		50	9	
		33	5	
0,01 (2,58)	0,036 (1/28)	75	10	Μέτρια έως ισχυρή
		50	3,5	
		60	5	
0,001 (3,28)	0,005 (1/216)	75	1	Ισχυρή έως πολύ ισχυρή
		50	0,5	
		92	5	

τιμές του παράγοντα Bayes, οι οποίες είναι μεγαλύτερες από την ελάχιστη τιμή του. Αυτός όμως είναι ένας δύσκολος τεχνικά τομέας, αλλά είναι σημαντικό να γίνει κατανοητό, τουλάχιστον ποσοτικά, τι υπολογίζουν οι παράγοντες Bayes και πώς διαφέρουν από τους λόγους πιθανοφανειών. Ο παράγοντας Bayes ισούται με τον λόγο της πιθανότητας των εμπειρικών δεδομένων υπό μια υπόθεση (π.χ. τη μηδενική) προς την πιθανότητά τους υπό μια άλλη υπόθεση (π.χ. την εναλλακτική). Τυπικά, η μια υπόθεση είναι η μηδενική υπόθεση της μη διαφοράς ή της μη ύπαρξης σχέσης. Η άλλη υπόθεση, γνωστή ως εναλλακτική υπόθεση, μπορεί να δηλωθεί με διάφορους τρόπους. Στην περίπτωση που η εναλλακτική υπόθεση λάβει μια συγκεκριμένη τιμή, ονομάζεται απλή υπόθεση, όπως άλλωστε και η μηδενική.

Η διαδικασία υπολογισμού του παράγοντα Bayes είναι δυσκολότερη όταν δηλώνουμε την εναλλακτική υπόθεση με πιο σύνθετο τρόπο, όπως για παράδειγμα «η πραγματική διαφορά δεν είναι μηδέν» ή «η θεραπεία είναι ευεργετική». Αυτή η υπόθεση ονομάζεται σύνθετη, γιατί αποτελείται από πολλές απλές υποθέσεις (η πραγματική διαφορά είναι 1%, 2%, 3% κ.λπ.). Το γεγονός αυτό δημιουργεί πρόβλημα όταν θέλουμε να υπολογίσουμε έναν παράγοντα Bayes, επειδή απαιτεί τον υπολογισμό της πιθανότητας των εν λόγω εμπειρικών δεδομένων κάτω από την υπόθεση «η πραγματική διαφορά είναι 1%, 2%, 3%...». Στο σημείο αυτό εντοπίζεται η διαφορά ανάμεσα στους παράγοντες Bayes

και στους λόγους πιθανοφανειών. Το θεώρημα Bayes για σύνθετες υποθέσεις εμπλέκει τον υπολογισμό της πιθανότητας των εμπειρικών δεδομένων μιας μελέτης κάτω από κάθε απλή υπόθεση ξεχωριστά (πραγματική διαφορά: 1%, πραγματική διαφορά: 2% κ.λπ.). Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής, το θεώρημα Bayes προτείνει να χρησιμοποιήσουμε τα βάρη που ορίζονται από την καμπύλη μιας εκ των προτέρων πιθανότητας. Η καμπύλη μιας εκ των προτέρων πιθανότητας αναπαριστά την αληθοφάνεια κάθε πιθανής εναλλακτικής υπόθεσης, με βάση την ένδειξη που προέρχεται από προγενέστερες μελέτες. Όμως, επειδή οι εκ των προτέρων πιθανότητες μπορεί να διαφέρουν μεταξύ διαφορετικών ατόμων, διαφορετικοί παράγοντες Bayes μπορεί να προκύψουν από τα ίδια δεδομένα.

Αναγνωρίζοντας την ανάγκη για μια χρήσιμη μονάδα μέτρησης των στοιχείων, οι μπεϋζιανοί στατιστικοί έχουν προτείνει πολλές προσεγγίσεις. Ίσως η απλούστερη είναι η διεξαγωγή μιας ανάλυσης ευαισθησίας (sensitivity analysis), υπολογίζοντας τους παράγοντες Bayes που προκύπτουν από ένα εύρος εκ των προτέρων πιθανοτήτων.^{18,19} Μια δεύτερη λύση είναι ο υπολογισμός του παράγοντα Bayes για διάφορες εκ των προτέρων πιθανότητες.^{20,21} Μια άλλη προσέγγιση είναι η εκ των προτέρων χρησιμοποίηση κατανομών που δίνουν περίπου ίσο βάρος σε κάθε μια από τις απλές υποθέσεις, οι οποίες αποτελούν τη σύνθετη υπόθεση.²²⁻²⁴ Τέλος, αντί του υπολογισμού του μέσου

όρου των διαφόρων παραγόντων Bayes μπορεί να γίνεται αναφορά μόνο του ελάχιστου παράγοντα Bayes που δίνει την ισχυρότερη ένδειξη εναντίον της μηδενικής υπόθεσης.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ο έλεγχος των υποθέσεων δημιουργεί πολλά προβλήματα, όταν χρησιμοποιείται για την εξαγωγή συμπερασμάτων με βάση τα δεδομένα μίας μόνο μελέτης, κυρίως γιατί δεν λαμβάνεται υπ' όψη η προϋπάρχουσα γνώση. Από την άλλη πλευρά, η μπεϋζιανή μεθοδολογία, η οποία είναι σχεδιασμένη για επαγωγική συμπερασματολογία σε κάθε μελέτη ξεχωριστά, δεν διασφαλίζει ότι μακροπρόθεσμα τα συμπεράσματα, τα οποία προέκυψαν με βαθμό εμπιστοσύνης ίσο με 95%, θα είναι αληθή στο 95% των περιπτώσεων.²⁵ Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι μπεϋζιανές κατανομές των εκ των προτέρων πιθανοτήτων δεν μπορούν να περιγράψουν

ιδανικά το τι είναι γνωστό (ή δεν είναι γνωστό) για την πραγματικότητα, με αποτέλεσμα το θεώρημα του Bayes να είναι ένα ατελές μοντέλο.^{26,27}

Πρέπει να αναγνωριστεί ότι οι έλεγχοι υποθέσεων προσφέρουν σημαντική πληροφορία μακροπρόθεσμα, αλλά δεν πρέπει να χρησιμοποιούνται για την εύρεση της σχέσης έπειτα από ερμηνεία της τιμής p . Αυτό γιατί η τιμή p , παρ' όλο που είναι ένα ευρέως χρησιμοποιούμενο εργαλείο για τη στατιστική συμπερασματολογία, πολύ περισσότερο από άλλα (διάστημα εμπιστοσύνης, μέγεθος της επίδρασης, παράγοντας Bayes κ.λπ.), φαίνεται να έχει λανθασμένη εφαρμογή στη βιοϊατρική έρευνα.^{28,29} Αυτό που ενδείκνυται είναι η χρήση του παράγοντα Φ του Bayes, επειδή καταλήγει σε ένα ασφαλές συμπέρασμα μέσα από το οποίο προϋπάρχουσα και νέα γνώση συνδυάζονται, ενώ απαιτείται ταυτόχρονα η σωστή ερμηνεία της τιμής p για την εξαγωγή αξιόπιστων συμπερασμάτων.^{30,31}

ABSTRACT

Bayes factor: A brief review of an alternative way of making statistical decisions

D. PANARETOS, D.B. PANAGIOTAKOS

Department of Nutrition and Dietetics, School of Health Science and Education, Harokopio University, Athens, Greece

Archives of Hellenic Medicine 2017, 34(5):622–627

This review briefly introduces the two schools of statistical inference: Bayesian and Frequentist. Through arguable evidence, the conclusion is reached that Bayesian methodology can contribute decisively, leading to valid inferences in an inductive way. This is because the Bayesian methodology can combine prior (by the prior probability of the null hypothesis to be true) with current evidence (by the calculation of the Bayes factor) to calculate the definitive probability of the null hypothesis to be true. Hypothesis testing and p -values are often used wrongly by researchers for deriving conclusions. In contrast to the Bayes theorem, hypothesis tests express probability as the relative frequency of the facts that are described in the statistical hypothesis and therefore cannot be used to draw conclusions based on the data of a single study, although it can provide important information after the repetition of the same study in the long term. It is suggested that there should be correct usage of the p -value, in combination with the Bayes factor, in order to derive credible inferences.

Key words: Bayes factor, Hypothesis testing, Likelihood, p -value, Strength of association

Βιβλιογραφία

1. EFRON B. Why isn't everyone a Bayesian? *The American Statistician* 1986, 40:1–5
2. MOREYA RD, ROMEIJN JW, ROUDER JN. The philosophy of Bayes factors and the quantification of statistical evidence. *J Math Psychol* 2016, 72:6–18
3. GOODMAN SN. Toward evidence-based medical statistics. 1: The P value fallacy. *Ann Intern Med* 1999, 130:995–1004
4. EDWARDS A. A history of likelihood. *Int Stat Rev* 1974, 42:9–15
5. PFEUFFER M. *Likelihood as concept of uncertainty*. Institute of Statistics, Ludwig-Maximilians-Universität München, Munich, 2014
6. GOOD I. *Probability and the weighing of evidence*. Charles Griffin, New York, 1950
7. CORNFIELD J. The Bayesian outlook and its application. *Biometrics* 1969, 25:617–657
8. BERGER JO, BERRY DA. Statistical analysis and the illusion of ob-

- jectivity. *Am Sci* 1988, 76:159–165
9. BERRY DA. Interim analyses in clinical trials: Classical vs Bayesian approaches. *Stat Med* 1985, 4:521–526
 10. ROYALL RM. *Statistical evidence: A likelihood primer*. Monographs on statistics and applied probability. Chapman & Hall/CRC, London, 1997
 11. BERGER J. *Statistical decision theory and Bayesian analysis*. Springer Verlag, New York, 1985
 12. EDWARDS W, LINDMAN H, SAVAGE LJ. Bayesian statistical inference for psychological research. *Psychol Rev* 1963, 70:193–242
 13. BROPHY JM, JOSEPH L. Placing trials in context using Bayesian analysis. GUSTO revisited by Reverend Bayes. *JAMA* 1995, 273:871–875
 14. DIAMOND GA, FORRESTER JS. Clinical trials and statistical verdicts: Probable grounds for appeal. *Ann Intern Med* 1983, 98:385–394
 15. LILFORD RJ, BRAUNHOLTZ D. The statistical basis of public policy: A paradigm shift is overdue. *Br Med J* 1996, 313:603–607
 16. PETO R. Why do we need systematic overviews of randomized trials? *Stat Med* 1987, 6:233–244
 17. POGUE J, YUSUF S. Overcoming the limitations of current meta-analysis of randomised controlled trials. *Lancet* 1998, 351:47–52
 18. KASS R, GREENHOUSE J. Investigating therapies of potentially great benefit: A Bayesian perspective. Comment on: “Investigating therapies of potentially great benefit: ECMO” by JH Ware. *Stat Sci* 1989, 4:310–317
 19. SPIEGELHALTER D, FREEDMAN L, PARMAR M. Bayesian approaches to randomized trials. *J R Statist Soc A* 1994, 157:357–416
 20. BERGER JO, SELLKE T. Testing a point null hypothesis: The irreconcilability of P values and evidence. *Journal of the American Statistical Association* 1987, 82:112–122
 21. BAYARRI MJ, BERGER JO. Quantifying surprise in the data and model verification. *Bayesian Statistics* 1998, 6:53–82
 22. GNEDENKO BV. *The theory of probability and the elements of statistics*. 5th ed. American Mathematical Society, Chelsey, 2005
 23. KASS RE, RAFTERY AE. Bayes factors. *Journal of the American Statistical Association* 1995, 90:773–795
 24. CARLIN BC, LOUISTA. *Bayes and empirical Bayes methods for data analysis*. Chapman & Hall/CRC, London, 1996
 25. RUBIN DB. Bayesianly justifiable and relevant frequency calculations for the applied statistician. *Ann Statist* 1984, 12:1151–1172
 26. SHAFER G. Savage revisited. *Stat Sci* 1986, 1:463–501
 27. TVERSKY A, KAHNEMAN D. Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. In: Slovic P, Tversky A, Kahneman D (eds) *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge University Press, Cambridge, 1982:1–20
 28. CHAVALARIAS D, WALLACH JD, LI AH, IOANNIDIS JP. Evolution of reporting P values in the Biomedical Literature, 1990–2015. *JAMA* 2016, 315:1141–1148
 29. SACHA V, PANAGIOTAKOS DB. Insights in hypothesis testing and making decisions in biomedical research. *Open Cardiovasc Med J* 2016, 10:196–200
 30. PANAGIOTAKOS DB. Value of p-value in biomedical research. *Open Cardiovasc Med J* 2008, 2:97–99
 31. BAYARRI MJ, BERGER JO. The interplay of Bayesian and frequentist analysis. *Stat Sci* 2004, 19:58–80
- Corresponding author:*
- D.B. Panagiotakos, Harokopio University of Athens, GR-176 71 Athens, Greece
e-mail: dbpanag@hua.gr